Розв’язки. 11 клас.

1. Вказати суму дійсних коренів рівняння $(x^2+x)(x^2+5x+6)=3$.

   У разі неможливості знайти суму, у відповідь записати число 1000.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники $x(x+1)(x+2)(x+3)$ та згрупуємо таким чином $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=3$. Зробимо заміну $t=x^2+3x$. Отримаємо $t(t+2)=3$. Тоді $t_1=-3$, $t_2=1$. Отримали такі рівняння $x^2+3x=-3$ та $x^2+3x=1$. Перше з них не має дійсних коренів, оскільки його дискримінант менший за нуль. Сума дійсних коренів другого рівняння дорівнює -3 (за оберненою теоремою Вієта).

Відповідь: -3.

2. Відомо, що $\frac{x^2-4y^2}{xy}=3$, причому $x>0, y<0$. Знайдіть значення виразу $\frac{2x^2+y^2}{3xy}$. Відповідь, у разі потреби, округлити до сотих.

Оскільки $y\neq 0$, то можемо умову переписати у такому вигляді $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-4}{\frac{x}{y}}=3$, звідки маємо, що $\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)-4=0$. Отже $\frac{x}{y}=-1$ або $\frac{x}{y}=4$. Оскільки за умовою $x>0, y<0$, то $\frac{x}{y}\neq 4$. Залишилось

підставити отримане значення у вираз $\frac{2x^2+y^2}{3xy}=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{3\frac{x}{y}}=\frac{2\cdot(-1)^2+1}{3\cdot(-1)}=-1$.

Відповідь: -1.

3. Вказати суму дійсних коренів нерівності $f(x) \leq 0$, якщо для всіх дійсних x виконується рівність $f(2x+1) = 4x^2 + 14x$. У разі неможливості знайти суму, у відповідь записати число 1000.

Замінимо $2x + 1 = t$, тоді $x = \frac{t-1}{2}$. Отже отримаємо наступну рівність $f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{t-1}{2}\right) = t^2 + 5t - 6 \leq 0$. Маємо $t \in [-6; 1]$. Тоді $x \in [-3{,}5; 0]$. Оскільки отримали відрізок, який має безліч точок, то вказати суму дійсних коренів неможливо.

Відповідь: 1000.

4. Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку [-1; 9] наступним чином $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1{,}4], \\ -1, x \in (4; 9] \end{cases}$ Знайти довжину проміжку, всі точки якого є розв'язками рівняння $f(\sqrt{x}) = 1$.

Замінимо $\sqrt{x} = t$, тоді $f(t) = 1$, отже $t \in [-1; 4]$. Тоді $\sqrt{x} \in [-1; 4]$ а значить $x \in [0; 16]$. Довжина проміжку – 16.

Відповідь: 16.

5. Нехай функція $f(x)$ визначена для всіх $x \neq 0$. Обчислити $2^5 \cdot f(2)$, якщо для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Якщо в рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ підставимо значення $x = 2$, то отримаємо $f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. А якщо підставимо $x = \frac{1}{2}$, то отримаємо $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Звідки $f(2) = -\frac{13}{32}$, а $2^5 \cdot f(2) = -13$.