Розв’язки. 10 клас.

1. Вказати суму дійсних коренів рівняння $(x^2+x)(x^2+5x+6)=3$.

   У разі неможливості знайти суму, у відповідь записати число 1000.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники $x(x+1)(x+2)(x+3)$ та згрупуємо таким чином $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=3$. Зробимо заміну $t=x^2+3x$. Отримаємо $t(t+2)=3$. Тоді $t_1=-3$, $t_2=1$. Отримали такі рівняння $x^2+3x=-3$ та $x^2+3x=1$. Перше з них не має дійсних коренів, оскільки його дискримінант менший за нуль. Сума дійсних коренів другого рівняння дорівнює -3 (за оберненою теоремою Вієта).

Відповідь: -3.

2. Відомо, що $\frac{x^2-4y^2}{xy}=3$, причому $x>0, y<0$. Знайдіть значення виразу $\frac{2x^2+y^2}{3xy}$. Відповідь, у разі потреби, округлити до сотих.

Оскільки $y\neq 0$, то можемо умову переписати у такому вигляді

$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-4}{\frac{x}{y}}=3$, звідки маємо, що $\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)-4=0$. Отже $\frac{x}{y}=-1$ або $\frac{x}{y}=4$. Оскільки за умовою $x>0, y<0$, то $\frac{x}{y}\neq 4$. Залишилось

підставити отримане значення у вираз $\frac{2x^2+y^2}{3xy}=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{3\frac{x}{y}}=\frac{2\cdot(-1)^2+1}{3\cdot(-1)}=-1$.

Відповідь: -1.

3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^4 - x^{19} - 16x^2 - 15} = \sqrt{1 - x^{19} - x^2}$.

   Корені рівня перелічити через крапку з комою (наприклад 1; 2; 3).

   Якщо рівняння не має коренів – у відповідь записати число 1000.

Після піднесення до квадрата обох частин рівняння отримаємо рівняння $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$, яке має корені -4 та 4. Перевіркою переконуємося, що корінь $x = 4$ – не підходить.

Відповідь: -4.

4. Нехай функція $f(x)$ визначена для всіх $x \neq 0$. Обчислити $f(1)$, якщо для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

В рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ підставимо значення $x = 1$. Отримаємо $f(1) + 3f(1) = 1$. Звідки $f(1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Відповідь: 0,25.

5. Нехай функція $f(x)$ визначена для всіх $x \neq 0$. Обчислити $2^5 \cdot f(2)$, якщо для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Якщо в рівність $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ підставимо значення $x = 2$, то отримаємо $f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. А якщо підставимо $x = \frac{1}{2}$, то отримаємо $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Звідки $f(2) = -\frac{13}{32}$, а $2^5 \cdot f(2) = -13$.

Відповідь: -13.